Ecuaciones Diferenciales I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Foto: José Juan Castro

Ecuaciones Diferenciales I Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2016-17.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primer parcial.

Fecha 16 de marzo de 2017.

Ejercicio 1. Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y).

En primer lugar, necesitamos encontrar la ecuación diferencial que define a las curvas dadas. Derivando implícitamente, obtenemos:

$$y + x \cdot y' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \vee \\ D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \end{cases}$$

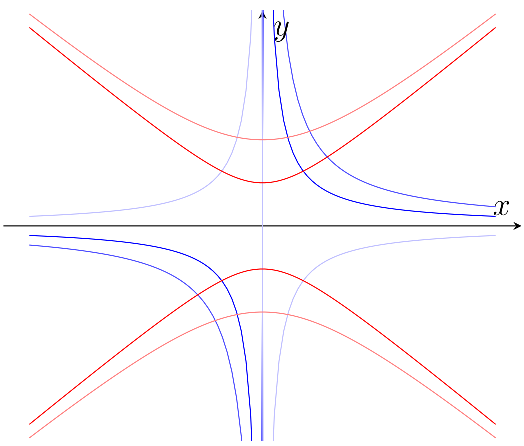
Como sabemos que el producto de pendientes de rectas tangentes es -1, y sabiendo la interpretación geométrica de la derivada, podemos afirmar que las trayectorias ortogonales a las curvas dadas son las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_{11} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ D_{12} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ D_{21} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ D_{22} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Resolvamos ahora esta ecuación diferencial. Se trata de una ecuación de variables separadas donde la función dependiente de y no tiene soluciones constantes, por lo que:

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= \int x\,dx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + C' \\ y^2 - x^2 &= C \end{aligned}$$

Esto vemos que define una curva en implícitas $y(x)$ en el dominio correspondiente. Vemos que la familia de curvas dadas son las hipérbolas con ejes en los ejes coordenados, mientras que su curva de familias ortogonales son las hipérbolas con ejes en las rectas $y = \pm x$. Así, las dos familias de curvas dibujadas en el plano (x, y) son:



Ejercicio 2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

Fijado $t \in \mathbb{R}$, definimos la función auxiliar

$$\begin{array}{rccc} f_t: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{x+t} + x \end{array}$$

Ver que esta ecuación define una función implícita $x(t)$ equivale a que la función f_t tiene un único cero.

Existencia En primer lugar, vemos que f_t es continua. Además, tenemos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f_t(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f_t(x) = +\infty$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, existe $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que $f_t(x(t)) = 0$.

Unicidad Tenemos que $f_t \in C^1(\mathbb{R})$, con:

$$f_t'(x) = e^{x+t} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, f_t es estrictamente creciente, por lo que tiene a lo sumo un cero.

Por tanto, la ecuación dada define una función implícita $x(t)$ en todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

Para ver que es derivable, hemos de aplicar el Teorema de la Función Implícita. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & e^{x+t} + x \end{array}$$

Esta tiene derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = e^{x+t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^{x+t} + 1$$

Ambas son continuas, por lo que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Además, la derivada parcial respecto de x es siempre positiva (en particular, no se anula). Por tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, aplicamos el Teorema de la Función Implícita al punto $(t, x(t))$ (ya que $F(t, x(t)) = 0$). Obtenemos así que $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$.

Para encontrar una ecuación diferencial que admita a $x(t)$ como solución, derivamos implícitamente la ecuación dada:

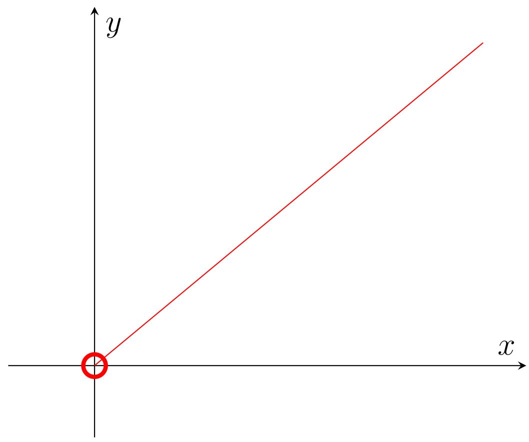
$$e^{x+t} + \left(e^{x+t} + 1\right) x' = 0 \implies x' = -\frac{e^{x+t}}{e^{x+t} + 1} \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 3. Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases}$$

Este admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

En primer lugar, hemos de representar la órbita pedida. Como $x(t) = y(t)$, tenemos que la órbita está contenida en la recta $y = x$. No obstante, como tenemos que $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, la órbita es la parte de la recta $y = x$ contenida en el primer cuadrante, sin incluir el origen. Esta es:



Para encontrar la ecuación diferencial de las órbitas, hemos de considerar la derivada de la función $y = y(x)$ que define la órbita. Así, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_1 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ D_2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Ejercicio 4. Se considera el cambio de variables

$$\varphi : s = x, y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua? Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$. ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

Para que el cambio de variables sea admisible, hemos de asegurar en primer lugar que es un difeomorfismo de clase C^1. Sea el cambio de variable $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (x, t) \end{array}$$

Vemos que φ se trata de la simetría axial respecto de la recta $y = x$. Comprobemos entonces que φ es un difeomorfismo, para lo cual calculamos su inversa:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (y, s) \end{array}$$

Comprobemos que son inversas:

$$\varphi^{-1}(\varphi(t,x)) = \varphi^{-1}(x,t) = (t,x) \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(\varphi^{-1}(s,y)) = \varphi(y,s) = (s,y) \qquad \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, φ^{-1} es la inversa de φ, por lo que φ es biyectiva. Además, como sus componentes son proyecciones, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que φ es un difeomorfismo.

Calculemos ahora la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 0 + 1 \cdot f(t,x) = f(t,x) \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, el cambio de variables es admisible si $f(t,x) \neq 0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Calculamos ahora la ecuación transformada. Tenemos que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{f(t,x)} = \frac{1}{f(y,s)} = \hat{f}(s,y) \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

Por tanto, tenemos que la relación entre f y $\hat{f}$ es:

$$\hat{f}(s,y) = \frac{1}{f(y,s)} \qquad \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0,y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0,y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Observación. Se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0.

Consideramos la función $F(x,y) = x^2 + y^2$, que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ por ser polinómica. Tomamos el punto $(x_0,y_0) = (0,0)$, que cumple que $F(0,0) = 0$.

Para demostrar que no existe función implícita que resuelva el problema, el estudiante podría pensar en primer lugar en aplicar el Teorema de la Función Implícita y ver que no cumple las condiciones:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 = 0$$

No obstante, esto tan solo afirma que no podemos aplicar dicho Teorema. Recordemos que la implicación en el Teorema de la Función Implícita es de una sola dirección. Para comprobar que no existe función implícita, basta que demostrar que el único punto que cumple $F(x,y) = 0$ es el origen, por lo que no puede existir una función $y(x)$ que cumpla $F(x, y(x)) = 0$ en un entorno de $(0,0)$.